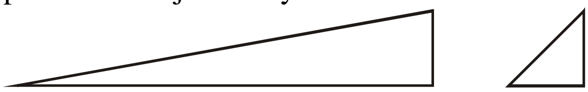
## 4.3.2 Koeficient podobnosti

**Předpoklady:** 040301

**Př. 1:** Která z následujících tvrzení jsou správná?
a) Každé dvě úsečky jsou podobné.
b) Každé dva pravoúhlé trojúhelníky jsou podobné.
c) Každé dva rovnostranné trojúhelníky jsou podobné.
d) Každé dva obdélníky jsou podobné.

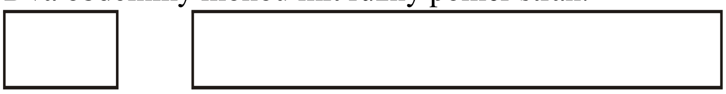
a) Každé dvě úsečky jsou podobné.
Pravda. Úsečka je dána pouze délkou, když porovnáváme dvě úsečky, získáme pouze jeden poměr, který se musí rovnat sám sobě.

b) Každé dva pravoúhlé trojúhelníky jsou podobné.
Nepravda, pravoúhlé trojúhelníky mohou mít různé další úhly a tím i různý tvar.

Například .

c) Každé dva rovnostranné trojúhelníky jsou podobné.
Pravda. Všechny mají tři stejné úhly o velikosti $60°$.

d) Každé dva obdélníky jsou podobné.
Nepravda. Dva obdélníky mohou mít různý poměr stran.

Například .

**Př. 2:** Najdi další geometrické útvary, kterou jsou si vždy podobné.

Vždy jsou si podobné:
- čtverce (všechny úhly pravé, všechny strany shodné, dané jediným údajem velikostí strany),
- kružnice (dána poloměrem, stejný tvar),
- kruh (to samé jako kružnice),
- půlkruh (polovina kruhu),
- čtvrtkruh (čtvrtina kruhu),
- ...

**Př. 3:** Co mají společného všechny útvary, které jsou si vždy podobné?

Jsou jednoznačně dány jediným údajem (čtverec stranou, kružnice poloměrem, úsečka délkou, rovnostranný trojúhelník délkou strany, ...).

**Př. 4:** Pro obdélník *ABCD* platí $|AB| = a = 6\text{ cm}$, $|BC| = b = 4\text{ cm}$, pro obdélník *KLMN* platí $|KL| = 9\text{ cm}$, $|LM| = 6\text{ cm}$. Jsou oba obdélníky podobné? Zapiš podmínku pro podobnost pomocí délek stran obou obdélníků.

Spočteme poměr odpovídajících si stran:

- delší strany: $\frac{|KL|}{|AB|} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$,
- kratší strany: $\frac{|LM|}{|BC|} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$,

$\Rightarrow$ obdélníky jsou si podobné. Podrobněji: obdélník *KLMN* je podobný obdélníku *ABCD* s koeficientem podobnosti $\frac{3}{2}$ (obdélník *ABCD* je podobný obdélníku *KLMN* s koeficientem podobnosti $\frac{2}{3}$).

Podmínka pro podobnost obdélníků *ABCD* a *KLMN*: $\frac{|KL|}{|AB|} = \frac{|LM|}{|BC|}$ (poměry odpovídajících si stran se rovnají).

Poměr podobnosti odpovídajících si stran se nazývá **koeficient podobnosti *k***. Podle hodnoty koeficientu podobnosti rozlišujeme:

- zvětšení: $k > 1$,
- zmenšení: $1 > k > 0$,
- shodnost: $k = 1$.

**Př. 5:** Pro čtverec *ABCD* platí: $a = 24\text{ m}$. Urči velikost strany čtverce *EFGH*, který je se čtvercem *ABCD* podobný s koeficientem $\frac{5}{6}$. S jakým koeficientem je čtverec *ABCD* podobný čtverci *EFGH*?

Platí, že $\frac{|EF|}{|AB|} = k = \frac{5}{6} \Rightarrow |EF| = k \cdot |AB| = \frac{5}{6} \cdot 24 = 20$

Čtverec *ABCD* je podobný čtverci *EFGH* s koeficientem $\frac{6}{5}$.

**Př. 6:** Na obrázku jsou dva podobné útvary, doplň rovnosti.

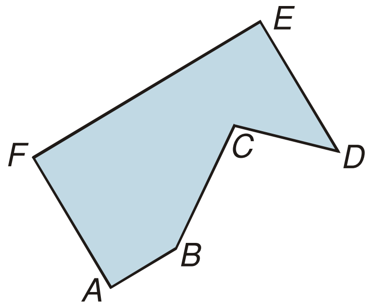
a) $|AB| : |NM| = |DE| : |\ \ |$

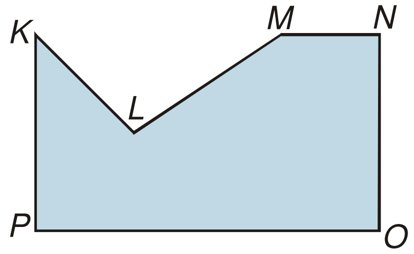
b) $|PO| : |\ \ | = |ON| : |FA|$

c) $|LM| : |CD| = |NO| : |\ \ |$

d) $|KP| : |DE| = |OL| : |\ \ |$

e) $|LM|:|PO| = |\ |:|EF|$ f) $|AE|:|BC| = |\ |:|\ |$




a) $|AB|:|NM| = |DE|:|KP|$ b) $|PO|:|EF| = |ON|:|FA|$

c) $|LM|:|CD| = |NO|:|\ |$ - nejde doplnit, strany $LM$ a $CD$ si neodpovídají $\Rightarrow$ z jejich poměru nevyplývá nic pro koeficient podobnosti (a poměry odpovídajících si stran).

d) $|KP|:|DE| = |OL|:|FC|$

e) $|LM|:|PO| = |CB|:|EF|$ - poměr na levé straně se týká pouze pravého trojúhelníku, ale poměr odpovídajících si stran v levém trojúhelníku musí být stejný (trojúhelníky mají stejný tvar).

f) $|AE|:|BC| = |NP|:|ML|$ - podobný problém jako v předchozím bodu.

**Dodatek:** Všechny rovnosti můžeme zapsat více způsoby. Například první rovnost může být zapsána i takto $|AB|:|NM| = |DE|:|PK|$ porovnáváme pouze délky úseček a u nich nezáleží na tom, který z bodů napíšeme jako první $|KP| = |PK|$.

**Pedagogická poznámka:** Bod e) vyřeší samostatně tak dvě třetiny žáků, pro ostatní je neřešitelný. Úspěšné dvě třetiny nemají žádný problém s tím, že přešli od poměru mezi dvěma trojúhelníky k poměru uvnitř jednoho trojúhelníku. Zbývající žáci problém mají, ale matematické odvození uvedené níže u nich tento problém příliš neřeší.

Rovnost v bodu e) můžeme odvodit i matematicky pomocí úprav rovnic. Platí $\frac{|LM|}{|CB|} = \frac{|PO|}{|EF|}$ (poměry odpovídajících si stran dvou podobných útvarů).

$$\frac{|LM|}{|CB|} = \frac{|PO|}{|EF|} \qquad / \cdot |CB|$$

$$|LM| = \frac{|PO| \cdot |CB|}{|EF|} \qquad / : |PO|$$

$\frac{|LM|}{|PO|} = \frac{|CB|}{|EF|}$ - výsledný poměr v bodu e).

Výsledek je přesto jasný: pokud jsou si dva útvary podobné a v jednom je například nejdelší strana o polovinu delší než druhá nejdelší, musí tomu tak být i u všech podobných trojúhelníků.

Podobnost zachovává poměry mezi stranami uvnitř jednoho útvaru.

**Př. 7:** Pro čtyřúhelník *ABCD* platí: $|AB| = 4,6\text{ cm}$, $|BC| = 6,6\text{ cm}$, $|CD| = 5,4\text{ cm}$, $|DA| = 4,2\text{ cm}$, $|AC| = 7,2\text{ cm}$.

a) Vypočti délky stran čtyřúhelníku *KLMN*, který je se čtyřúhelníkem *ABCD* podobný s koeficientem $\frac{2}{3}$.

b) Čtyřúhelník *EFGH* je podobný čtyřúhelníku *ABCD* a platí $|GH| = 135\text{ cm}$. Urči délky zbytku jeho stran.

c) Urči délky stran čtyřúhelníku *UVXY*, se kterým je čtyřúhelník *ABCD* podobný s koeficientem $\frac{6}{5}$.

a) Vypočti délky stran čtyřúhelníku *KLMN*, který je se čtyřúhelníkem *ABCD* podobný s koeficientem $\frac{2}{3}$.

Strany čtyřúhelníku *KLMN* získáme tak, že délky odpovídajících stran čtyřúhelníku *ABCD* vynásobíme koeficientem podobnosti

- $|KL| = k|AB| = \frac{2}{3} \cdot 4,5\text{ cm} = 3\text{ cm}$,
- $|LM| = k|BC| = \frac{2}{3} \cdot 6,6\text{ cm} = 4,4\text{ cm}$,
- $|MN| = k|CD| = \frac{2}{3} \cdot 5,4\text{ cm} = 3,6\text{ cm}$,
- $|KN| = k|AD| = \frac{2}{3} \cdot 4,2\text{ cm} = 2,8\text{ cm}$,
- $|KM| = k|AC| = \frac{2}{3} \cdot 7,2\text{ cm} = 4,8\text{ cm}$.

b) Čtyřúhelník *EFGH* je podobný čtyřúhelníku *ABCD* platí $|GH| = 99\text{ cm}$. Urči délky zbytku jeho stran.

Strana *GH* odpovídá straně *CD* $\Rightarrow$ z jejich poměru určíme koeficient podobnosti a z něj dopočítáme zbývající strany čtyřúhelníku *EFGH*.

$$\frac{|GH|}{|CD|} = \frac{135}{5,4} = 25 = k$$

- $|EF| = k|AB| = 25 \cdot 4,5\text{ cm} = 112,5\text{ cm}$,
- $|FG| = k|BC| = 25 \cdot 6,6\text{ cm} = 165\text{ cm}$,
- $|EH| = k|AD| = 25 \cdot 4,2\text{ cm} = 105\text{ cm}$,
- $|EG| = k|AC| = 25 \cdot 7,2\text{ cm} = 180\text{ cm}$.

c) Urči délky stran čtyřúhelníku *UVXY*, se kterým je čtyřúhelník *ABCD* podobný s koeficientem $\frac{6}{5}$.

Je-li čtyřúhelník *ABCD* podobný čtyřúhelníku *UVXY* s koeficientem $\frac{6}{5}$, je čtyřúhelník *UVXY* podobný čtyřúhelníku *ABCD* s koeficientem $\frac{5}{6}$.

- $|UV| = k|AB| = \frac{5}{6} \cdot 4{,}5 \text{ cm} = 3{,}75 \text{ cm}$,
- $|VX| = k|BC| = \frac{5}{6} \cdot 6{,}6 \text{ cm} = 5{,}5 \text{ cm}$,
- $|XY| = k|CD| = \frac{5}{6} \cdot 5{,}4 \text{ cm} = 4{,}5 \text{ cm}$,
- $|YU| = k|AD| = \frac{5}{6} \cdot 4{,}2 \text{ cm} = 3{,}5 \text{ cm}$,
- $|UX| = k|AC| = \frac{5}{6} \cdot 7{,}2 \text{ cm} = 6 \text{ cm}$.

**Pedagogická poznámka:** V případě nejasností odkazuji na větu „obdélník *KLMN* je podobný obdélníku *ABCD* s koeficientem podobnosti $\frac{3}{2}$“ z příkladu 4.

**Př. 8:** Jsou si podobné listy formátů A4 a A5? Pokud ano, jaký je koeficient této podobnosti? Ověř měřením.

Listy jsou si podobné (ze dvou listů A5 se dá složit list A4), kratší strana listu A4 je delší stranou listu A5.
Delší strana A4: 297 mm
Delší strana A5 (kratší strana A4): 210 mm.
Koeficient podobnosti: $\frac{297}{210} = 1{,}4142...$

**Pedagogická poznámka:** Všichni odhadují koeficient podobnosti na 2 a jsou poměrně překvapení, když jim vyjde něco jiného.

**Př. 9:** Obdélník *ABCD* má délky stran 2 cm a 4 cm. Obdélník $A'B'C'D'$ je podobný obdélníku *ABCD* s poměrem podobnosti 3.
a) V jakém poměru jsou obvody obou obdélníků?
b) V jakém poměru jsou jejich obsahy?

a) V jakém poměru jsou obvody obou obdélníků?
Obvod obdélníku *ABCD* je $o = 2(2+4) \text{ cm} = 12 \text{ cm}$
Strany obdélníku $A'B'C'D'$ mají délky 6 cm a 12 cm $\Rightarrow$ obvod obdélníku $A'B'C'D'$ je $o = 2(6+12) \text{ cm} = 36 \text{ cm}$

Obvod obdélníku $A'B'C'D'$ je 3 krát větší než obvod obdélníku *ABCD* (podle očekávání).

b) V jakém poměru jsou jejich obsahy?
Obsah obdélníku *ABCD*: $S = ab = 2 \cdot 4 = 8 \text{ cm}$.
Obsah obdélníku $A'B'C'D'$: $S = ab = 6 \cdot 12 = 72 \text{ cm}$.

Obsah obdélníku $A'B'C'D'$ je 9 krát větší než obsah obdélníku *ABCD* (jasné, při výpočtu násobíme dvě strany, každá je 3 krát větší $\Rightarrow$ výsledek musí být 9 krát větší).

Nyní je již jasné, proč je koeficient podobnosti mezi formáty A4 a A5 1,4142... Pokud máme ze dvou litrů A5 složit jeden papír A4, musí být plocha (obsah) listu A4 dvakrát větší než plocha listu A5 $\Rightarrow$ koeficient podobnosti obou obdélníků musí být $\sqrt{2} = 1,4142...$.

**Př. 10:** Obdélník *ABCD* má délky stran *a* a *b*. Obdélník $A'B'C'D'$ je podobný obdélníku *ABCD* s poměrem podobnosti 4.
a) V jakém poměru jsou obvody obou obdélníků?
b) V jakém poměru jsou jejich obsahy?

a) V jakém poměru jsou obvody obou obdélníků?
Obvod obdélníku *ABCD* je $o = 2(a+b) = 2a+2b$
Strany obdélníku $A'B'C'D'$ mají délky $4a$ a $4b$ $\Rightarrow$ obvod obdélníku $A'B'C'D'$ je $o = 2(4a+4b) = 8a+8b = 4(2a+2b)$

Obvod obdélníku $A'B'C'D'$ je 4 krát větší než obvod obdélníku *ABCD*.

b) V jakém poměru jsou jejich obsahy?
Obsah obdélníku *ABCD*: $S = ab$.
Obsah obdélníku $A'B'C'D'$: $S = 4a \cdot 4b = 16ab$.

Obsah obdélníku $A'B'C'D'$ je 16 krát větší než obsah obdélníku *ABCD*.

**Př. 11:** Obdélník *ABCD* má délky stran *a* a *b*. Obdélník $A'B'C'D'$ je podobný obdélníku *ABCD* s poměrem podobnosti *k*.
a) V jakém poměru jsou obvody obou obdélníků?
b) V jakém poměru jsou jejich obsahy?

a) V jakém poměru jsou obvody obou obdélníků?
Obvod obdélníku *ABCD* je $o = 2(a+b) = 2a+2b$
Strany obdélníku $A'B'C'D'$ mají délky $ka$ a $kb$ $\Rightarrow$ obvod obdélníku $A'B'C'D'$ je $o = 2(ka+kb) = 2ka+2kb = k(2a+2b)$

Obvod obdélníku $A'B'C'D'$ je *k* krát větší než obvod obdélníku *ABCD*.

b) V jakém poměru jsou jejich obsahy?
Obsah obdélníku *ABCD*: $S = ab$.
Obsah obdélníku $A'B'C'D'$: $S = ka \cdot kb = k^2 ab$.

Obsah obdélníku $A'B'C'D'$ je $k^2$ krát větší než obsah obdélníku *ABCD*.

**Shrnutí:**